

# Bernoulli-Gleichung

## Druckverlauf in Strömungen

In diesem Laborversuch soll das Verhalten von Flüssigkeits- und Gasströmungen untersucht werden. Jede Strömung wird in erster Linie durch ihr *Strömungsfeld* beschrieben: dem Vektor der Strömungsgeschwindigkeit (Größe und Richtung) in jedem Punkt des Raumes. Jede Strömung übt auf Gegenstände, die sich in ihrem Bereich befinden, Wirkungen (z.B. Druck, Auftrieb, Widerstand) aus.

### Einführung

Es ist sehr schwierig, Strömungen von Flüssigkeiten und Gasen allgemein und detailliert zu beschreiben. Detaillierte Beschreibung bedeutet, dass man Kräfte und daraus resultierende Beschleunigungen berücksichtigt, um damit das Strömungsfeld zu berechnen. Die Bewegungsgleichungen für die Volumenelemente in Strömungen führen zu Gleichungssystemen (partiellen Differentialgleichungen), die nur von Fall zu Fall mit aufwendigen numerischen Verfahren ausgewertet werden können. Das gilt insbesondere für Strömungen, die geometrischen Einschränkungen (Randbedingungen) unterworfen sind, z.B. auf Hindernisse treffen, Tragflächen umströmen oder in Rohren mit variablen Querschnitten fließen.

Ein anderer Ansatz berücksichtigt ausschließlich die energetischen Verhältnisse in Strömungen. In diesem Fall kann man vorteilhaft den Energieerhaltungssatz anwenden, sofern dessen Voraussetzungen erfüllt sind (keine Reibung oder andere Energieverluste).

Bei Strömungen handelt es sich um bewegte Massen. Daher enthält eine Strömung, wie jede andere Bewegung auch, Energie in Form von *kinetischer Energie* (Bewegung) und *potentieller Energie* (Höhendifferenzen). Zusätzlich hat auch der statische *Druck* die Fähigkeit, Arbeit zu verrichten und ist damit als eine dritte Form von Energie wirksam. Es ist in Strömungen darüber hinaus sinnvoller, die Energie pro Volumenelement, die *Energiedichte*  $w = \frac{dW}{dV}$ , zu betrachten.

Der Energieerhaltungssatz in Strömungen kann nun folgendermaßen angegeben werden:

**Bernoulli-Gleichung**

$$w = p + \rho \cdot g \cdot h + \frac{\rho}{2} \cdot v^2 = konst.$$

$$\text{Einheit: } [w] = \frac{Nm}{m^3} = \frac{Ws}{m^3}$$

Es sind: Dichte  $\rho$ <sup>1</sup>, Erdbeschleunigung  $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$

Die so definierte Energiedichte ist im gesamten Strömungsfeld konstant, d.h. sie hat in jedem Punkt des Feldes den gleichen Wert. Sie gilt für ideale Flüssigkeiten und Gase (keine Reibung und keine Kompressionsverluste).

---

<sup>1</sup> Sind die statischen Druckunterschiede nicht zu groß, kann auch die Dichte von Gasen als konstant angesehen werden. Flüssigkeiten sind von vornherein praktisch inkompressibel.

In technischen Zusammenhängen sind auch folgende Bezeichnungen üblich:

$p$ : statischer Druck,  $\frac{\rho}{2} \cdot v^2$ : dynamischer Druck (Staudruck),  $\rho \cdot g \cdot h$ : geodätischer Druck. Die Energiedichte wird dann als Gesamtdruck bezeichnet:  $p_{ges} = w$

**Kontinuitätsgleichung:** Da in Strömungen keine Masse verloren geht, fließt zu jeder Zeit aus jedem Volumenelement genau so viel Masse aus, wie auch hinein-

strömt:  $\dot{m}_{ein} = \dot{m}_{aus}$ .

Bei konstanter Dichte gilt das sogar für Volumenströme:  $\dot{V}_{ein} = \dot{V}_{aus}$

Längs einer Leitung ist der Massen(Volumen-)strom ebenfalls überall gleich und die mittlere Strömungsgeschwindigkeit ( $v$ ) stellt sich entsprechend dem jeweiligen

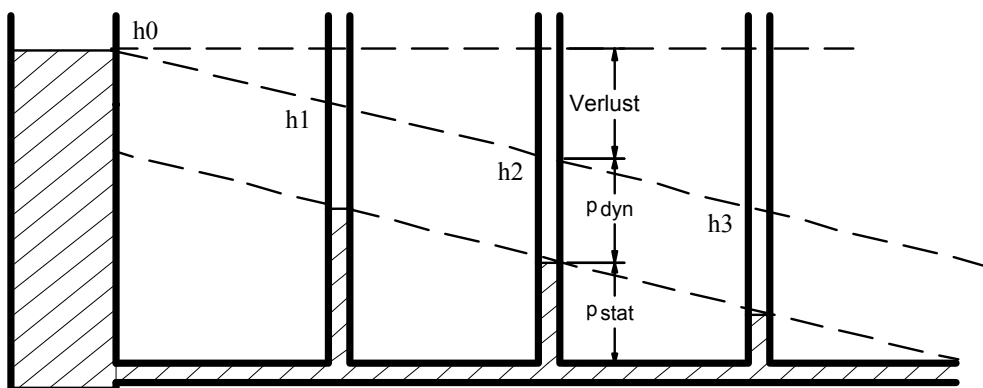
Querschnitt ( $A$ ) ein:  $\dot{V} = A \cdot v = konst.$  Verringert sich der Querschnitt so muss sich die Strömungsgeschwindigkeit entsprechend erhöhen.

## Versuch

Es sollen in diesem Versuch die Druck- und Geschwindigkeitsverhältnisse von Strömungen in Rohren bestimmt werden. Als strömendes Medium dient sowohl Luft als auch Wasser.

## **Wasserströmung**

Die Versuchseinrichtung für die Wasserströmung besteht aus einem Reservoir, an das ein dünnes Ausströmrohr mit mehreren Steigrohren angeschlossen ist. Das Reservoir wird kontinuierlich so nachgefüllt, dass es immer den gleichen Wasserstand behält und sich somit eine konstante Strömung einstellt. Die Höhe der Wassersäule in den Steigrohren entspricht der Energiedichte an der jeweiligen Position des Steigrohres. Auf Grund der Reibung treten Energieverluste auf, welche die anfänglich vorhandene Energie fast aufzehren.



## Untersuchung des Druckverlaufs im Strömungsrohr

1. Installieren Sie Reservoir und Ausströmrohr. Bestimmen Sie die Lage der Steigleitungen auf dem Ausströmrohr.  
Regulieren Sie den Zulauf aus dem Wasserhahn so, dass ein hoher Wasserspiegel im Reservoir konstant bleibt.  
Bestimmen Sie die Höhen der Wassersäulen im Reservoir und in den Steigleitungen vom Zentrum des Ausströmrohres aus.  
Stellen Sie den Druckverlauf bei verschlossener Ausflussöffnung fest (Wasserhahn schließen!).
2. Bestimmen Sie aus Messwerten und fassen Sie ggf. in einer grafischen Darstellung zusammen:  
Druckverlauf entlang des Ausströmrohres  
Strömungsverluste entlang des Ausströmrohres  
Wie groß ist der dynamische Druck und die Strömungsgeschwindigkeit?  
Erläutern Sie die Ergebnisse dieses Versuchs und geben Sie die möglichen Messunsicherheiten an.

### Erläuterungen zu diesem Versuch:

(dazu obige Skizze des Versuchsaufbaus)

Die Situation bei diesem Versuch ist durch die fast strömungslose Wassersäule im Reservoir<sup>2</sup> und die verlustbehaftete Strömung im Ausströmrohr gekennzeichnet. Die der Strömung zur Verfügung stehende Energie ist durch die Höhe der Wassersäule im Reservoir vorgegeben. In Bezug auf die Energiedichte bedeutet das:

$w_0 = \rho \cdot g \cdot h_0 + p_{Luft} = p_0 + p_{Luft}$  mit dem „wirksamen“ Bodendruck  $p_0$  auf dem Niveau des Ausflussrohres (Bezugspunkt:  $h = 0$ ).

Im Ausströmrohr wird die Energie durch Reibung aufgezehrt. Die anfängliche Energiedichte verringert sich:  $w_0 = w_n + w_{n-Verl}$   $n = 1, 2, 3$ . Die Bernoulligleichung liefert an den Positionen der Steigrohre:

$$w_0 = \rho \cdot g \cdot h_0 + p_{Luft} = p_n + \frac{\rho}{2} \cdot v^2 + w_{n-Verl} + p_{Luft}$$

Der Luftdruck wirkt wegen der allseits offenen Gefäße in jedem Rohr gleichmäßig und braucht nicht weiter berücksichtigt zu werden. Die wesentlichen Verhältnisse können ver-

kürzt dargestellt werden:  $\rho \cdot g \cdot h_0 = p_n + \frac{\rho}{2} \cdot v^2 + w_{n-Verl}$

Dabei spiegelt der zweite Term der Gleichung den Zustand in der Strömung unter den Steigrohr (mit  $h = 0$ ) wieder.

Im Steigrohr gilt:  $p_n = \rho \cdot g \cdot h_n$

Die Höhe der Wassersäule im Steigrohr ist also ein Maß für den statischen Druck in der Strömung darunter. Am Ende des Ausströmrohres ist der statische Druck gleich Null (bzw. gleich dem Luftdruck).

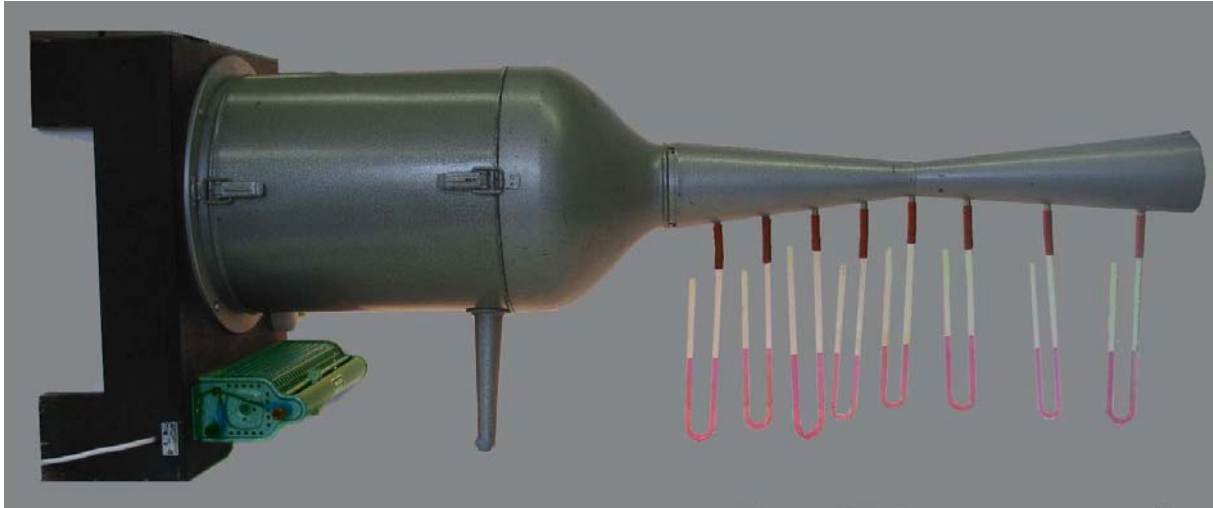
Bei geschlossenem Rohr (keine Strömung, keine Verluste) herrscht überall der gleiche statische Druck.

---

<sup>2</sup> Weil der Querschnitt des Reservoirs im Verhältnis zu dem des Ausflussrohres wesentlich größer ist, sinkt das Wasser dort mit sehr geringer Geschwindigkeit. Da der dynamische Energieanteil auch noch vom Quadrat der Geschwindigkeit abhängt, ist er im Reservoir vernachlässigbar.

## Luftströmung im Staurohr

Die Versuchseinrichtung für die Luftströmung besteht aus einem Gebläse, einem Staurohr mit mehreren Stutzen zur Druckmessung und mehreren Flüssigkeitsmanometern (näheres zum Manometer s.u.).



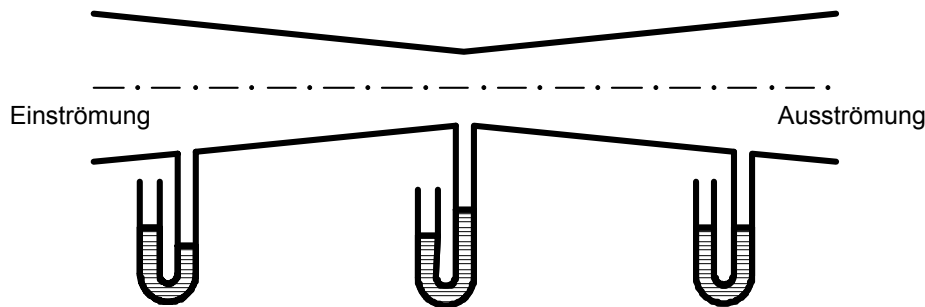
### Untersuchung vom Druckverlauf längs des Staurohres

1. Installieren Sie das Staurohr und bringen Sie die Manometer an.  
Machen Sie sich mit der Funktion der Manometer vertraut. Welcher Druck wird durch sie angezeigt?  
Bestimmen Sie den maximalen und den minimalen Strömungsquerschnitt des Rohres.  
Messen Sie die Lage der Messstutzen aus.
2. Lassen Sie das Gebläse mit hoher Leistung laufen (sehr laut).  
Halten Sie das Rohr am Ende zu. Notieren Sie den Druck an den einzelnen Positionen und kommentieren Sie das Ergebnis.  
Bestimmen Sie bei offenem Rohr den Energieverlust der Strömung, indem Sie die Druckdifferenz zwischen erstem und letztem Messpunkt bestimmen (ein Manometer benutzen, Verbindung zu entferntem Messpunkt mittels Schlauch herstellen).  
Notieren Sie den Druckverlauf in den einzelnen Messpunkten. Leiten daraus ab, in welchen Verhältnis sich die Strömungsgeschwindigkeit jeweils verändert hat. An welchen Stellen gibt es Über- bzw. Unterdruck?  
Stellen Sie die Ergebnisse der Auswertung auch grafisch dar.  
Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit die Luft aus dem Rohr herausströmt.

### Erläuterungen zu diesem Versuch:

Der Querschnitt des Staurohres verringert sich zur Mitte hin um dann wieder größer zu werden. Nach der Kontinuitätsgleichung verändert sich die Strömungsgeschwindigkeit

entsprechend. Seien  $v_0, A_0, p_0$  die Werte für Strömungsgeschwindigkeit, Querschnitt und Druck am Anfang des Rohres, so gilt:  $v(x) = v_0 \cdot \frac{A_0}{A(x)}$



Der Druckverlauf:  $p(x) + \Delta p_{\text{verl}} = p_0 + \frac{\rho}{2}(v_0^2 - v(x)^2) = p_0 + \frac{\rho}{2} \cdot v_0^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{A_0}{A(x)}\right)^2\right)$

Der Term  $\Delta p_{\text{verl}}$  beschreibt die bis zur aktuellen Position aufgetretenen Energieverluste in der Strömung, während  $p(x)$  vom Manometer angezeigt wird.

Der Term  $\rho \cdot g \cdot h$  für die potentielle Energie wird hier nicht berücksichtigt, da in waagrecht verlaufenden Strömungen keine Höhendifferenzen auftreten. Strömungsverluste machen sich dadurch bemerkbar, dass am Eingang des Rohres ein Überdruck herrscht, während am Ausgang keine Druckdifferenz zur Umgebung besteht.

Verschließt man das Rohr am Ausgang, wird die Strömung unterbrochen und alle Manometer zeigen den gleichen Druck an.

### Flüssigkeitsmanometer

Ein Flüssigkeitsmanometer besteht aus einem U-Rohr, welches teilweise mit einer farbigen Trennflüssigkeit gefüllt ist. Die Höhendifferenz der beiden Flüssigkeitsspiegel entspricht der Druckdifferenz (s.u.).

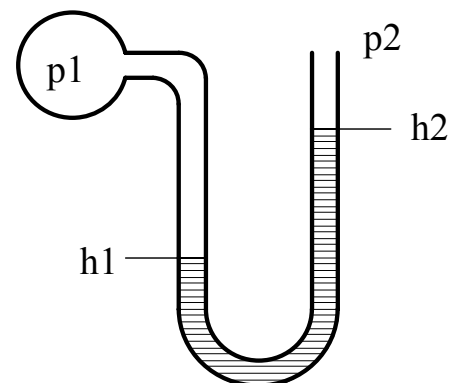
*Im Flüssigkeitmanometer findet zwar keine Strömung statt, trotzdem gilt die Bernoulligleichung ( $v = 0$ ):*

$$p_1 + \rho_{\text{Fl}} \cdot g \cdot h_1 = p_2 + \rho_{\text{Fl}} \cdot g \cdot h_2$$

*aufgelöst:*

$$p_1 - p_2 = \rho_{\text{Fl}} \cdot g \cdot (h_2 - h_1)$$

*Mit diesem Manometer wird eine Druckdifferenz gemessen. Der Druck am offenen Schenkel ist der Referenzdruck (meistens der momentane Luftdruck).*



Druck wird nach dem SI-System in der Einheit *Pascal* ( $1\text{Pa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 10^{-5}\text{bar}$ ) angegeben. Der Differenzdruck wird in diesem Manometer in *mm Flüssigkeitssäule* (hier: Wasser) gemessen und muss entsprechend umgerechnet werden. (1mm Wassersäule entspricht 9,81 Pa bei einer Dichte für Wasser von  $\rho = 1000 \text{kg m}^{-3}$ ).